Systèmes régis par une équation différentielle du 1° et du 2° ordre

TD1

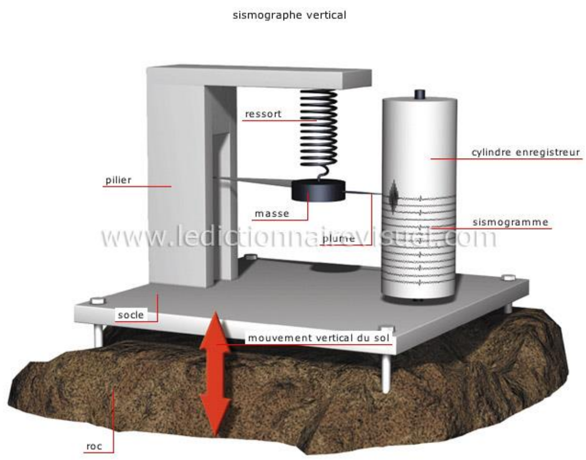
Etude d'un sismographe dans le domaine de Laplace

Programme - Compétences		
B24	MODELISER	Systèmes linéaires continus et invariants: - Modélisation par équations différentielles - Calcul symbolique - fonction de transfert; gain, ordre, classe, pôles, zéros
B25	MODELISER	Signaux canoniques d'entrée: - impulsion - échelon - rampe - signaux sinusoïdaux
C21	RESOUDRE	Réponses temporelle et fréquentielle: - systèmes du 1er et 2e ordre - intégrateur

Exercice 1: Sismographe

Présentation

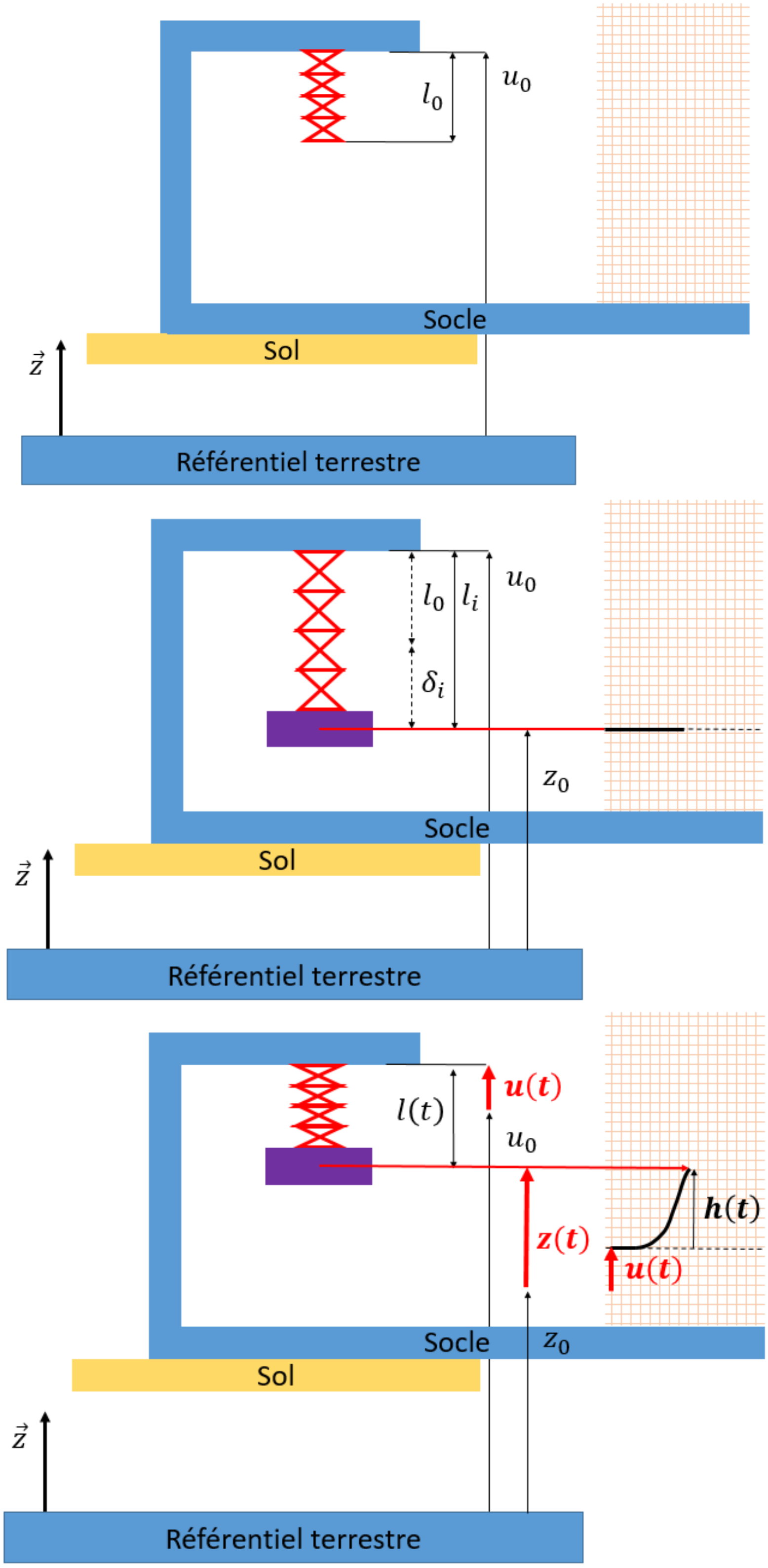
Un sismographe est un instrument de mesure des secousses sismiques issues d'un séisme. Dans cette étude, nous nous intéressons à un sismographe à axe verticale permettant de mesurer les secousses dans la direction verticale.



Un socle est encastré au sol afin de subir les déplacements du sol issus des séismes.
Une masse est suspendue dans le vide par un ressort au socle. Elle est mise en mouvement par l'intermédiaire du socle et du ressort lorsqu'une sollicitation verticale apparaît.
Un système d'acquisition accroché à la masse permet de mesurer ses oscillations afin d'en déduire les caractéristiques du séisme en cours.

Modélisation - Hypothèses

Pour simplifier l'étude de ce système, le paramétrage suivant est adopté :



Au repos :

- Sans masse suspendue, le ressort est à sa longueur à vide l_0
- Avec la masse, le ressort est à une longueur initiale l_i. On note δ_i l'allongement initial du ressort : $\delta_i = l_i - l_0$

Lors des oscillations :

- La variation de longueur du ressort avec la longueur initiale vaut : $l(t) - l_i = u(t) - z(t)$
- L'écrasement du ressort vaut $\delta(t) = l(t) - l_0 = l(t) - l_i + \delta_i = u(t) - z(t) + \delta_i$
- Les déplacements $z(t)$ de la masse et $u(t)$ du socle sont comptés à partir de la position d'équilibre au temps $t = 0$ lorsque la base est fixe.

$$u(0) = 0 \rightarrow z(0) = 0$$

Remarque : On fera attention au signe de la force de rappel du ressort compte tenu de son orientation et de l'orientation de la verticale $\vec{z}$

Hypothèses supplémentaires

- Masse : m
- Accélération de la pesanteur : $\vec{g}$
- Raideur du ressort : k
- On associe les variables dans le domaine de Laplace $U(p)$ et $Z(p)$ respectivement aux variables temporelles $u(t)$ et $z(t)$.
- On suppose le référentiel terrestre Galiléen
- On suppose que les forces de frottement de l'air sont de type « dissipation visqueuse », opposées au mouvement et proportionnelles (coefficient h) à la vitesse $v(t)$
- La masse du ressort est négligée

Objectif de l'étude

L'objectif de notre étude est de caractériser la relation entre le déplacement du sol $u(t)$ et le déplacement de la masse suspendue $z(t)$. Il sera alors possible de déterminer la réponse du sismographe $h(t)$ correspondant au sismogramme tracé sur le cylindre enregistreur

$$h(t) = z(t) - u(t)$$

Dans la pratique, la connaissance de cette relation permet de remonter aux caractéristiques du séisme.

Etude théorique du comportement du système

Question 1: Faire le bilan des actions mécaniques extérieures s'appliquant au système « masse » et donner leur expression.
Question 2: Déterminer l'équation différentielle du mouvement de la masse exprimée selon la variable z.
Question 3: Donner l'expression de l'allongement initial δ_i du ressort en fonction de m,g et k.
Question 4: En déduire une expression simplifiée de l'équation différentielle du mouvement ne faisant intervenir que $z(t)$, ses dérivées, $u(t)$ et les constantes du problème
Question 5: Transposer cette équation dans le domaine de Let aplace.
Question 6: En déduire la fonction de transfert du système : $H(p) = \frac{Z(p)}{U(p)}$

Réponse du système à un séisme

On suppose un séisme présentant une excitation du sol sinusoïdale de la forme :

$$u(t) = U_0 \sin(\omega t)\, \hat{u}(t)$$

Avec $\hat{u}(t)$ la fonction échelon unitaire

Question 7: Donner l'expression de $U(p)$, transformée de Laplace de $u(t)$.
Question 8: En déduire l'expression de la position $Z(p)$ de la masse dans le domaine de Laplace.

On fixe

- Les composants du sismographe étudié
- La pulsation de l'onde d'entrée : $u(t) = 10 \sin(t)\, \hat{u}(t)$

L'équation différentielle du système devient la suivante :

$$2z(t) + 3\frac{dz(t)}{dt} + \frac{d^2z(t)}{dt^2} = 2u(t)$$

Il est alors possible de donner la fonction $Z(p)$ avec ses coefficients numériques :

$$Z(p) = \frac{20}{(p^2+3p+2)(p^2+1)} = \frac{20}{(p+1)(p+2)(p^2+1)}$$

Remarque : il est évident ici que les valeurs numériques sont peu réalistes et ont été choisies pour simplifier l'application.

Question 9: Proposer la forme de la décomposition en éléments simples de $Z(p)$.

Remarque : cette question est hors programme

Question 10: Déterminer les coefficients de la décomposition en éléments simples proposée.
Question 11: En déduire le mouvement temporel de la masse.
Question 12: Vérifier que cette solution convient.

Question 13: En déduire l'expression de la courbe tracée sur le cylindre enregistreur $h(t)$

Question 14: Montrer que cette solution est caractérisée par une réponse en régime transitoire $h^t(t)$ et une réponse en régime permanent $h^p(t)$ que vous expliciterez